Leçon n° 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et application.

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

I/ Racines d'un polynôme.

A/ Premières propriétés. [G] [ROM]

Définition 1 : Racine d'un polynôme.

Proposition 2 : α est une racine de P ssi $X-\alpha$ divise P dans $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 3 : Les polynômes de degré impair réels ont une racine réelle.

Définition 4 : Multiplicité d'une racine.

Proposition 5 : Expression des polynômes en fonction de leurs racines et de leurs multiplicités.

Corollaire 6 : Un polynôme de degré n sur un corps a au plus n racines.

Contre-exemple 7 : Faux si $\mathbb{K}$ n'est pas un corps : par exemple, regarder $4X$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}[X]$.

Proposition 8 : Si $\mathbb{K}$ est infini alors si $P \in \mathbb{K}[X]$ est tel que pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x)=0$, $P=0$.

Corollaire 9 : Identification entre un polynôme et sa fonction polynomiale associée si $\mathbb{K}$ est infini.

Proposition 10 : Formule de Taylor pour les polynômes.

Corollaire 11 : Relation entre la dérivée et la multiplicité d'une racine.

Définition 12 : Polynôme scindé.

Théorème 13 : Théorème d'Alembert-Gauss.

Application 14 : Toutes les matrices complexes sont trigonalisables.

B/ Relations coefficients-racines. [G] [FGNAlg2] [ROM]

Définition 15 : Polynômes symétriques élémentaires.

Théorème 16 : Relation entre les coefficients et les racines d'un polynôme.

Proposition 17 : Formules de Newton.

Application 18 : Algorithme de Faddeev-Le Verrier.

Théorème 19 : Théorème de structure des polynômes symétriques.

Exemple 20 : $P=X^2+Y^2+Z^2=(X+Y+Z)^2-2(XY+XZ+YZ)$.

II/ Localisation des racines d'un polynôme.

A/ Premiers résultats. [FGNAlg1]

Développement 1

Théorème 21 : Théorème de Gauss-Lucas.

Théorème 22 : Énoncé équivalent.

Application 23 : Application de Gauss-Lucas à un polynôme.

Théorème 24 : Théorème de Kronecker.

Corollaire 25 : Soit $P \in Z[X]$ unitaire de degré n et irréductible sur $\mathbb{Q}$. Si toutes les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1, alors $P=X$ ou $P=\Phi_n$.

B/ Disques de Gershgörin. [FGNAlg2]

Définition 26 : Matrice compagnon.

Proposition 27 : Si C_P est une matrice compagnon alors $\chi_{C_p}=P$.

Proposition 28 : Disques de Gershgörin.

Remarque 29 : On applique les disques de Gershgörin sur les matrices compagnons pour localiser les racines d'un polynôme.

Proposition 30 : Si un disque est isolé, alors il y a une unique racine du polynôme dans ce disque.

C/ Approximation de racines. [PGCD]

Proposition 31 : Méthode de Newton.

Application 32 : Méthode de Héron.

Remarque 33 : On utilise la méthode de Newton après dichotomie pour s'approcher des racines (condition initiale proche de la racine)

III/ Racines de polynôme et extensions de corps.

A/ Éléments algébriques. [PER]

Définition 34 : Élément algébrique et transcendant.

Exemple 35 : $\sqrt{2}$, i et j sont algébriques sur $\mathbb{Q}$.

Proposition 36 : Un élément α est algèbrique ssi $[\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{K}] < +\infty$ et définition du degré d'un algébrique.

B/ Corps de rupture, décomposition, corps finis. [PER] [ROM]

Définition 37 : Corps de rupture.

Théorème 38 : Existence et unicité.

Définition 39 : Corps de décomposition.

Théorème 40 : Existence et unicité.

Théorème 41 : Existence et unicité des corps finis.

Développement 2

Théorème 42 : $X^{p^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{P \in U_n(p)} P$ et dénombrement des polynômes irréductibles de degré donné avec équivalent.

Corollaire 43 : Il existe des polynômes irréductibles de tout degré, donc construction explicite de $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[X]/(P)$ où P irréductible de $\mathbb{F}_p[X]$ de degré n, plus facile à manipuler informatiquement.

Exemple 44 : Construction de $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[X]/(X^2+X+1)$ et $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[X]/(X^2+1)$.

Références :

— [PER] Perrin p. 65-73
— [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 362 et p. 421
— [PGCD] Rouvière Petit guide du calcul différentiel p. 142
— [G] Gourdon Algèbre p. 53-80
— [FGNAlg1] Francinou, Gianella Nicolas Algèbre 1 p. 213 et p. 229
— [FGNAlg2] Francinou, Gianella Nicolas Algèbre 2 p. 79 et p. 80